

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ASTRA”

Etapa locală, 07.02.2026

Filiera tehnologică

Clasa a XII-a

1. Costul marginal al unui produs este $C_m(x) = 20 + 2x$, unde x reprezintă numărul de unități produse, iar venitul marginal al unui produs este $V_m(x) = 220 - 6x$.

Se cunoaște faptul că $C_m(x) = C'(x)$ (costul marginal $C_m(x)$ este derivata costului total $C(x)$) și $V_m(x) = V'(x)$ (venitul marginal $V_m(x)$ este derivata venitului total $V(x)$). De asemenea, se știe că funcția profitului $P(x)$ este $P(x) = V(x) - C(x)$ (diferența dintre venitul total și costul total). Dacă $V(0) = 0$ și $C(0) = 40$ atunci:

a) (15p) Determinați funcțiile venit total $V(x)$ și cost total $C(x)$.

b) (10p) Câte unități x trebuie produse pentru ca profitul să fie maxim?

2. (25p) Se consideră funcția $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$. Calculați media aritmetică a numerelor

$$I, J, K, \text{ unde } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx, J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x) \cos x dx \text{ și } K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 f(x) dx.$$

3. Se consideră mulțimea $M = \left\{ A = \begin{pmatrix} x & y \\ 6y & x \end{pmatrix} / x, y \in \mathbb{Q} \text{ și } \det A = 1 \right\}$.

a) (10p) Arătați că înmulțirea matricelor este lege de compoziție pe mulțimea M .

b) (10p) Determinați elementele simetrizabile din mulțimea M (în raport cu înmulțirea matricelor).

4. Se consideră funcția $f: (0, \infty) \rightarrow (0, 2)$, $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ și legea de compoziție „*” definită pe mulțimea

$$(0, 2) \text{ prin } x * y = \frac{xy}{xy - x - y + 2}.$$

a) (10p) Demonstrați că $f(xy) = f(x) * f(y)$ pentru orice $x, y \in (0, \infty)$.

b) (10p) Determinați numărul real $x \in (0, 2)$ pentru care $x * x * x = \frac{4}{3}$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Timp efectiv de lucru: 3 ore.